TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

MAT-01210 Insinöörimatematiikka A2 / Riikka Kangaslampi (SC309)
Tentti 12.12.2018 klo 17-20

Tentti on kaksiosainen. Kaksi tehtävää suoritetaan exam-tentissä, kaksi tässä tilaisuudessa. Kukin tehtävä on kuuden pisteen arvoinen.
Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukkokirjoja. Tehtäväpaperin kääntöpuolella on kaavakokoelma.

Muista perustella ratkaisusi huolellisesti!

Tehtävät

1) (Tehdään exam-tentissä)

2) (Tehdään exam-tentissä)

3) Olkoot

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Laske $5\mathbf{C} - 2\mathbf{B}$, jos mahdollista. (1 p.)

b) Laske $\mathbf{C}\mathbf{B}^T$, jos mahdollista. (2 p.)

c) Laske $\det(\mathbf{A})$, jos mahdollista. (2 p.)

d) Montako ratkaisua on yhtälöllä $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$? Miksi? (1 p.)

4) a) Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$ matriisin $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ominaisarvo ja olkoon $k \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että λ^k on matriisin $\mathbf{A}^k$ ominaisarvo. (2 p.)

b) Olkoot

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pisteet $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ ja $\mathbf{p}_3$ määräävät tason avaruuteen $\mathbb{R}^3$. Osoita, että piste $\mathbf{q}$ ei kuulu tähän tasoon. (4 p.)

Insinöörimatematiikka 2
Kaavakokoelma

1. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}$

2. $\cos(\theta) = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$

3. $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

4. $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \left(\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}$

5. $\mathbf{n}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p}) = 0$

6. $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$

7. $(AB)^T = B^T A^T,\ (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

8. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

9. $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$

10. $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},\ \det(A-\lambda I) = 0$

11. $V^{-1}AV = D \Leftrightarrow A = VDV^{-1}$

12. $A^T A\overline{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$