MAT-01310 Insinöörimatematiikka A3. Tentti 11.6.2019. Antti Vuorimäki

Sallitut välineet: Ainoastaan kirjoitusvälineet. **Ei laskimia eikä taulukoita!**

Liitteet: Tämän kysymyspaperin kääntöpuolella on kaavakokoelma.

Vastausohje: Laskutoimitukset on perusteltava ja kaikki olennaiset välivaiheet esitettävä. Käytä luonnosteluun erillistä suttupaperia, jotta varsinaisesta vastauksestasi tulee siisti. Vedä vastauspapereissa "henkselit" sellaisten merkintöjen yli, joita et halua arvosteltaviksi. Kirjoita nimesi ja opiskelijanumerosi jokaisen vastauspaperin yläosaan.

Arvostelu: Kukin tehtävä arvostellaan pistein 0...6. Tehtävien alakohdat (a, b, jne.) ovat keskenään tasa-arvoisia, ellei toisin mainita. Malliratkaisut ja osallistuneiden tehtäväkohtaiset pisteet julkaistaan toteutuskerran Moodle-sivulla korjaamisen valmistuttua.

1. Laske

$$\text{a)} \int_1^2 x^3 \ln x \, dx, \qquad \text{b)} \int \frac{1}{x(x^2+1)^2} \, dx.$$

2. a) Ratkaise alkuarvotehtävä $x^3y' + x^2y = x^4$, $y(1) = 0$. (Muista kertoa myös, millä välillä laskemasi y on ratkaisu.)
b) Laske yhtälön $y'' - 2y' = \sin(4x)$ yleinen ratkaisu.

3. a) Tutki, suppeneeko vai hajaantuuko sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\, 2^n}{n!}$.
b) Muodosta Maclaurinin sarja funktiolle $\arctan(x)$ (2 p.) ja esitä siitä menetelmä π:n arvon laskemiseksi (1 p.).

4. a) Määritä käyrän $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ pituus välillä $2 \le x \le 4$.
b) Laske funktion $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ binomisarjaesityksen neljä ensimmäistä termiä, kun $-1 < x < 1$.

MAT-01310 Insinöörimatematiikka A 3 / Vuorimäki 2019 / Kaavoja

1.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$
$\cot(x) = \dfrac{1}{\tan(x)}$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert + C$
$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x) + C$
$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x) + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x) + C = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x) + C = \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{x+1}{x-1}\right\rvert + C$

2. $s = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad A = 2\pi\int_a^b \lvert f(x)\rvert\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx, \quad V = \pi\int_a^b f(x)^2\,dx$

3. $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$, $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$

4. Jos $\displaystyle\sum_{k=l}^{\infty} aq^k$ suppenee, niin $S = \dfrac{aq^l}{1-q}$.

5. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left\lvert\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\rvert$

6.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k}{n}x^n \qquad (k \in \mathbb{R},\ -1 < x < 1)$$

$$\binom{k}{n} = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}, \quad \text{kun } n \geq 1 \quad \text{ja} \quad \binom{k}{0} = 1.$$