Usean muuttujan funktiot

Tentti 19.10.2022 / Merja Laaksonen

- Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta
Muista, että jokaisessa tehtävässä pisteet tulevat perusteluista eikä arvauksista.

1. Olkoon $f(x, y, z) = zy^2 - x^3$ ja piste $A = (2, -1, 3)$.

a) Mihin suuntaan funktio f kasvaa voimakkaimmin pisteessä A?

b) Viivan (tai radan) $\mathbf{r}(t)$ tangenttivektori $\mathbf{r}'(t) = \left(1, -1/2, 4 + 40t^{-3}\right)$.
Paljonko on derivaatta $\dfrac{df}{dt}$ hetkellä $t = 2$, kun radalla ollaan pisteessä $\mathbf{r}(2) = A$?

c) Pisteet (x, y, z), jotka toteuttavat ehdon $f(x, y, z) = f(2, -1, 3)$, muodostavat pinnan. Mikä on tuon pinnan tangenttitaso pisteessä A?

2. Jos pisteestä $(1, 2)$ lähdetään kohti pistettä $(2, 2)$, niin funktion f suunnattu derivaatta on 2. Jos pisteestä $(1, 2)$ lähdetään kohti pistettä $(1, 1)$, niin funktion f suunnattu derivaatta on -2. Paljonko on suunnattu derivaatta, jos pisteestä $(1, 2)$ lähdetään kohti pistettä $(4, 6)$?

3. Etsi funktion

$$f : f(x, y) = (2y - 1)\left(x^2 + y^2 - 4\right)$$

suurin ja pienin arvo rajoitetussa alueessa

$$\Omega = \left\{(x, y) \middle| x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Esitä myös kohdat, missä ne saavutetaan.

4. Laske

$$\iiint_T dV,$$

kun $T = \left\{(x, y, z) \middle| \, 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, \;\; -1 \leq y \leq 1, \;\; x \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\right\}$.

Tentin tulokset ja kokonaisarvosanat julkaistaan ensin Moodlen osiossa Tentit. Sisuun tulokset rekisteröidään myöhemmin, kun tarpeeksi moni on nähnyt tuloksensa.

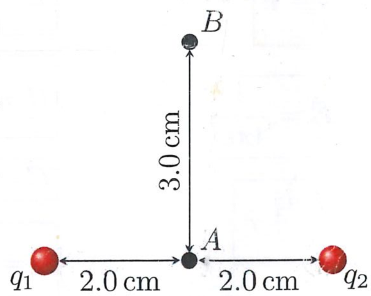
FYS.103 Yliopistofysiikka 3, syksy 2022 (Paavilainen)

Tentti 21.10.2022

- **Kokeessa saa käyttää laskinta, mutta se ei saa olla ohjelmoitava.**
- **Kokeessa saa olla mukana itse käsin kirjoitettu lunttilappu (yksi A4, molemmat puolet). Lunttilappu tulee palauttaa koepaperin mukana.**
- Kääntöpuolella kaavoja ja vakioita.

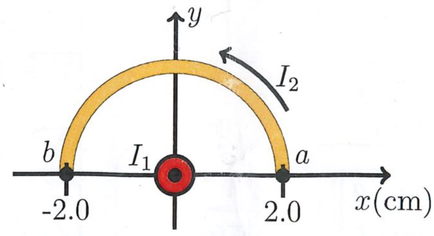
1. Tasokondensaattorin levyt ovat ympyränmuotoisia (säde 12.0 cm) ja levyjen välinen etäisyys on 0.15 mm. Levyjen välinen tila on täytetty eristeellä, jonka eristevakio $K = 2.25$. Levyillä on varaukset $+Q$ ja $-Q$, missä $Q = 3.4 \cdot 10^{-9}$C.
a) Laske kondensaattorin kapasitanssi.
b) Kuinka suuri sähkökenttä levyjen välissä on?
c) Eristemateriaali ei ole täydellinen eriste vaan sen resistiivisyys on $2.5 \cdot 10^{9}\ \Omega$m. Laske virrantiheyden suuruus eristeen läpi, kun varaus alkaa purkautua sen läpi levyltä toiselle.

2. Kuvan pistevaraukset $q_1 = +1.60$ nC ja $q_2 = +2.50$ nC ovat paikoillaan etäisyydellä 4.0 cm toisistaan.
a) Laske varausten q_1 ja q_2 aiheuttama sähkökenttä pisteessä A. Ilmoita myös sähkökentän suunta
b) Laske työ, jonka varausten q_1 ja q_2 aiheuttama sähkökenttä tekee kolmanteen pistevaraukseen $q_0 = -0.055$ nC, kun q_0 siirtyy pisteestä A pisteeseen B.



3. Tutkit kelaa, jonka poikkileikkaus on ympyränmuotoinen säteen ollessa 2.0 cm. Kelassa on 50 kierrosta. Kela on tasaisessa magneettikentässä, jonka suuruus muuttuu ajan funktiona: $B(t) = (3.0\ \mathrm{mT/s^2})t^2$. Kelan tason pintavektori on magneettikentän suuntainen. Laske kelaan indusoituneen emf:n $\mathcal{E}$ (eli sähkömotorisen voiman) suuruus hetkellä $t = 5.0$ s.

4. Pitkässä, suorassa johtimessa 1 (punainen) kulkee viereisen kuvan mukaisesti virta $I_1 = 4.00$ A z-akselia pitkin positiiviseen z-suuntaan (paperista ulospäin).
a) Laske johtimen 1 aiheuttaman magneettikentän $\vec{B}_1$ suuruus etäisyydellä 2.0 cm johtimesta. Voit käyttää valmista kaavaa tai johtaa lausekkeen Ampèren lain avulla. (2p)



b) Mihin suuntaan magneettikenttä $\vec{B}_1$ osoittaa kuvan pisteessä a? (1p)
c) Johtimessa 2 (puoliympyrä $a \to b$) kulkee virta $I_2 = 2.00$ A kuvan mukaiseen suuntaan. Laske johtimeen 2 kohdistuvan ($\vec{B}_1$ aiheuttaman) magneettisen voiman suuruus. (3p)

5. Selitä lyhyesti (4-6 riviä/kohta riittää).
a) Ferromagneettista materiaalia laitetaan suoran solenoidin sisälle. Aluksi materiaalin magnetisaatio on nolla, eikä solenoidissa kulje virtaa. Selosta miten magneettikenttä materiaalin sisällä muuttuu, kun solenoidin virta kasvaa ajan funktiona. Miten suhteellinen permeabiliteetti liittyy asiaan?
b) Tutkit r-säteistä pallopintaa, jonka sisällä on vain yksi, positiivinen pistevaraus q. Jos pistevaraus on pallon keskipisteessä, sähkökentän vuo $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$ pinnan läpi voidaan kirjoittaa muodossa $E 4\pi r^2$, missä E on pistevarauksen aiheuttaman sähkökentän suuruus. Perustele matemaattisesti, miten tämä onnistuu.

FYS.103 Yliopistofysiikka 3, kaavakokoelma

$g = 9.80\,\mathrm{m/s^2}$

$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}$

$\mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{TmA^{-1}}$

$e = 1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$

$m_e = 9.109 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$

$\mu_B = 5.788 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV/T}$

$k = 1.381 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$

$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\boldsymbol{k}}$

Pallo: $A = 4\pi r^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{r}$

$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}$ $\quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$

$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{r}$

$p = qd$ $\quad \vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

$\Phi_E = \int \vec{E} \cdot d\vec{A}$

$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\mathrm{encl}}}{\epsilon_0}$

$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{r}$ $\quad V = \frac{U}{q_0}$

$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$ $\quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{r}$

$W_{a\to b} = q_0(V_a - V_b) = U_a - U_b$

$V_{ab} = V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$\vec{E} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}\right)$

$C = \frac{Q}{V_{ab}}$ $\quad C = \epsilon\frac{A}{d}$

$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

$U = \frac{Q^2}{2C}$ $\quad u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$

$C = KC_0$ $\quad \epsilon = K\epsilon_0$

$I = \frac{dQ}{dt}$ $\quad J = \frac{I}{A}$

$\vec{J} = nq\vec{v}_d$ $\quad \vec{E} = \rho\vec{J}$

$\rho(T) = \rho_o[1 + \alpha(T - T_0)]$

$R = \frac{\rho L}{A}$ $\quad \rho = \frac{m}{ne^2\tau}$

$V = IR$ $\quad P = V_{ab}I$

$\sum I_{\mathrm{in}} = \sum I_{\mathrm{out}}$

$\sum V = 0$

$q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})$

$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B} + \vec{E})$

$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$

$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ $\quad \vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$

$\vec{\mu} = NI\vec{A}$

$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}$

$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$

$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ $\quad B = \mu_0 nI$

$\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0\vec{M}$

$\vec{B} = K_m\vec{B}_0$

$\vec{M} = \frac{\vec{\mu}_{\mathrm{total}}}{V}$

$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$ $\quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\left(i_c + \epsilon\frac{d\Phi_E}{dt}\right)_{\mathrm{encl}}$

$M = \frac{N_2\Phi_{B,2}}{i_1}$ $\quad \mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt}$

$L = \frac{N\Phi_B}{i}$ $\quad \mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$

$U = \frac{1}{2}LI^2$ $\quad u = \frac{B^2}{2\mu_0}$

$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}(1 - e^{-tR/L})$