

Tentti(1) MAT-02650 Algoritmimatematiikka

10.5. 2019 Hansen

Vastaa jokaiseen kysymykseen ja perustele vastauksesi huolellisesti! Tentissä ei saa käyttää muistiinpanoja, kirjallisuutta eikä laskinta. HUOM. Tehtävät EIVÄT ole vaikeusjärjestyksessä!

Kirjoita kaikkiin papereihin selkeästi nimesi, opiskelijanumerosi ja myös koulutusohjelmasi.

Muistathan antaa palautetta Kaiku-järjestelmän kautta saadaksesi opintosuorituksen.

1. (a) (3 pistettä) Olkoon $A = \{1, 2, 3\}$ ja $R \subseteq A \times A$, $S \subseteq A \times A$, $T \subseteq A \times A$, missä

$$R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle\}, S = \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\} \text{ ja } T = \{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}.$$

Laske

$$|(R \circ S) \cap (R \circ T)|.$$

- (b) (3 pistettä) Tarkastellaan relaatiota $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, missä aRb jos ja vain jos $a+b$ on parillinen. Jos R on ekvivalenssirelaatio, niin todista se tai jos R ei ole ekvivalenssirelaatio, niin todista se.

2. (a) (3 pistettä) Olkoon $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{N}_0$, ja $f(x) = \lfloor \log_2(x) \rfloor$.

- 1) Onko f injektio? (lyhyt perustelu)
- 2) Onko f surjektio? (lyhyt perustelu)
- 3) Laske $f(a)$, kun $a = 16\sqrt{2}$.

- (b) (3 pistettä) Muuta lauseke $(q \vee r) \rightarrow \neg p$ konjunkttiiviseen normaalimuotoon (CNF)

3. (a) (3 pistettä) Osoita määritelmän nojalla, että $(n^2 + 2)^2 = O(n^4)$.

- (b) (3 pistettä) Osoita määritelmän nojalla, että $n^3 - 4n + 2019 = \Omega(n^3)$.

4. Osoita tautologioita ja päättelysääntöjä käyttäen (ilman totuustaulua), että

$$\left((\neg C \vee B) \wedge (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D) \right) \rightarrow \neg A \vee D$$

on pätevä teoria.

Ekvivalensseja ja päättelysääntöjä propositio- ja predikaattilogiikkaan

Disjunktio	Konjunktio	Implikaatio
$p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$	$p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$	$p \rightarrow \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$
$p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$	$p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$	$p \rightarrow \mathbf{F} \Leftrightarrow \neg p$
$p \vee p \Leftrightarrow p$	$p \wedge p \Leftrightarrow p$	$\mathbf{T} \rightarrow p \Leftrightarrow p$
$p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{T}$	$p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{F}$	$\mathbf{F} \rightarrow p \Leftrightarrow \mathbf{T}$
		$p \rightarrow p \Leftrightarrow \mathbf{T}$
		$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
		$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
		$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

De Morganin laki	absorptiolait
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
	$p \wedge (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$
	$p \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

Vaihdannaisuus	Liitännäisyys	Osittelu
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$\neg \forall x : W(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg W(x)$	$\neg \exists x : W(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg W(x)$
$\exists x : (A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x : A(x) \vee \exists x : B(x)$	$\forall x : (A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x : A(x) \wedge \forall x : B(x)$
$\exists x : (A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x : A(x) \rightarrow \exists x : B(x)$	$\forall x : \forall y : W(x, y) \Leftrightarrow \forall y : \forall x : W(x, y)$
$\exists x : \exists y : W(x, y) \Leftrightarrow \exists y : \exists x : W(x, y)$	

$\forall x : (C \vee A(x)) \Leftrightarrow C \vee \forall x : A(x)$	$\forall x : (C \wedge A(x)) \Leftrightarrow C \wedge \forall x : A(x)$
$\exists x : (C \vee A(x)) \Leftrightarrow C \vee \exists x : A(x)$	$\exists x : (C \wedge A(x)) \Leftrightarrow C \wedge \exists x : A(x)$
$\forall x : (C \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow C \rightarrow \forall x : A(x)$	$\exists x : (C \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow C \rightarrow \exists x : A(x)$
$\forall x : (A(x) \rightarrow C) \Leftrightarrow \exists x : A(x) \rightarrow C$	$\exists x : (A(x) \rightarrow C) \Leftrightarrow \forall x : A(x) \rightarrow C$

$\forall x : A(x) \Rightarrow \exists x : A(x)$	$\exists x : (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x : A(x) \wedge \exists x : B(x)$
$\forall x : A(x) \vee \forall x : B(x) \Rightarrow \forall x : (A(x) \vee B(x))$	$\forall x : (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x : A(x) \rightarrow \forall x : B(x))$
$\exists y : \forall x : W(x, y) \Rightarrow \forall x : \exists y : W(x, y)$	

Päättelysäännöt:

MP $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$	MT $\frac{\neg B, A \rightarrow B}{\neg A}$	Conj. $\frac{A, B}{A \wedge B}$	Simp $\frac{A \wedge B}{A}$	Add $\frac{A}{A \vee B}$	DS $\frac{A \vee B, \neg B}{A}$	HS $\frac{A \rightarrow B, B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$
UI $\frac{\forall x : A(x)}{A(t)}$ (mikä tahansa t)	UG $\frac{A(t)}{\forall x : A(x)}$ (mielivaltainen t)	EG $\frac{A(t)}{\exists x : A(x)}$ (mikä tahansa t)	EI $\frac{\exists x : A(x)}{A(t)}$ (uusi t)			