MAT-10352 INSINÖÖRIMATEMATIIKKA B5.
TENTTI 26.5.2010.(Pirttimäki).
Ei laskinta, kaavat kääntöpuolella.

1. **(i)** Laske

$$\iint_R \sin\left(\pi x^2\right) da$$

kun R on kolmio, jonka kärkipisteet ovat (0, 0), (1, 0) ja (1, 2).

(ii) Laske sen kappaleen tilavuus, jonka pohjana on yksikköympyrän ($x^2 + y^2 = 1$) se osa jossa $y \geq 0$ ja yläpintana taso z=3-x-y.

2. Olkoon A joukko, jota rajoittavat suorat x + y = 1, x + y=2 ,x = 0, y = 0.
Laske

$$\iint_A \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) da$$

Ohje: Suorita muuttujanvaihto (u=x-y, v=...) ja käytä kaavaa 1 kaavakokoelmasta.

3. **(i)** Ratkaise AAP: $y' = \frac{1-x}{xy}$, $y(1) = -1$.
(HUOM! Ilmoita ratkaisu muodossa y=...)

(ii) Ratkaise alkuarvoprobleema
$y'' - 3y' + 2y = -8e^{2x}$.

4. Ratkaise DY-ryhmä
$$\begin{cases} x'(t) &= 2x(t) + 3y(t) \\ y'(t) &= -x(t) - 2y(t) \end{cases}$$

Alkuarvolla x(0)=1,y(0)=1

MAT-1035X Insinöörimatematiikka 5 / vihjeitä

1. $$\iint_{R_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

2. $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

3. $$m = \iint_R \rho(x,y)\,da, \quad J = \iint_R d(x,y)^2 \rho(x,y)\,da$$
$$x_0 = \frac{1}{m}\iint_R x\,\rho(x,y)\,da, \quad y_0 = \frac{1}{m}\iint_R y\,\rho(x,y)\,da$$

4. $$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta \\ y = \rho \sin\phi \sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$$

5. $$\frac{dy}{dx} + a(x)\,y = f(x); \quad y = e^{-A(x)}\left(\int f(x)e^{A(x)}dx + C\right), \quad A'(x) = a(x)$$

6. $$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$
$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

7. $$a\cos\omega t + b\sin\omega t = A\sin(\omega t + \phi)$$
$$A = \sqrt{a^2+b^2} \text{ ja } \cos\phi = \frac{b}{A},\ \sin\phi = \frac{a}{A} \text{ eli } \phi = \arctan\frac{a}{b}\ (\pm\pi)$$

8. $f(x) = c\,e^{\alpha x}$

$y(x) = K e^{\alpha x}$ jos α ei ole kar. yhtälön juuri

$y(x) = K x e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 1–kertainen juuri

$y(x) = K x^2 e^{\alpha x}$ jos α on kar. yhtälön 2–kertainen juuri

9. $$y'' + \omega^2 y = p\cos\omega x + q\sin\omega x$$
$$y(x) = A x\cos\omega x + B x \sin\omega x, \quad A = -\frac{q}{2\omega} \text{ ja } B = \frac{p}{2\omega}$$

10. $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

(i) yksinkertainen reaalijuuri λ_1; ratkaisu $e^{\lambda_1 x}$

(ii) yksinkertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$; ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin\beta x$

(iii) k–kertainen reaalijuuri λ_1, ratkaisut

$e^{\lambda_1 x},\ x e^{\lambda_1 x},\ x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x}$

(iv) k–kertainen imaginaarijuuripari $\alpha \pm j\beta$, ratkaisut

$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x e^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x e^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

11. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ ...... $\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} + \mathbf{x}_p(t)$

$$X(t) = \left[\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}\right]$$

$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, $\mathbf{w}_{1,2} = \mathbf{u} \pm j\mathbf{v}$ ......, $\mathrm{Re}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$, $\mathrm{Im}\{\mathbf{w}_1 e^{\lambda_1 t}\}$

12. $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + e^{\lambda t}\mathbf{k}$ ..... $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$ .... $(A - \lambda I)\mathbf{v} = -\mathbf{k}$

13. Integrointikaavoja:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)); \quad F' = f, \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$$

$$\int u(x)\underbrace{v'(x)\,dx}_{dv(x)} = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$