MAT-20451 Fourier'n menetelmät

Tentti 23.4.2012

– Ei muistiinpanoja, kirjallisuutta, laskinta.
– Jokaiseen paperiin nimi ja opiskelijanumero.

1. Olkoon T-jaksoisella funktiolla $f(t)$ Fourier-sarja

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

missä $\omega = 2\pi/T$ ja missä kertoimet ovat toistaiseksi tuntemattomia. Laske seuraavasti: integroi ensin yhtälö

$$f(t)\sin(3\omega t) = \frac{1}{2}a_0 \sin(3\omega t) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega t)\sin(3\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\sin(3\omega t))$$

puolittain $\int_{-T/2}^{T/2} \ldots dt$ ja yhtälön oikea puoli yhteenlaskettava kerrallaan. Laske oikean puolen integraalien summa päättelemällä arvo jokaiselle sen integraalille apuna integroitavan parittomuus ja alla oleva *Vihje 2*.

(Yhdelle sarjan kertoimista tuisi näin laskukaava.)

2. Laske funktion Fourier-sarjan kompleksiversiolle kaikki kertoimet

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{d}^{d+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_{d}^{d+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt - j\int_{d}^{d+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\right)$$

kun $f(t) = \sin(t)$. Muodosta näistä lopuksi funktion kompleksinen Fourier-sarja

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}.$$

Vihje 1: Integroitava parillinen tai pariton ja integrointiväli origokeskinen.

Vihje 2: $2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$.

Käännä!

3. Tunnetaan Fourier-muunnos $F(j\omega) = 2AT\text{sinc}(\omega T)$ tasapulssille

$$f(t) = \begin{cases} A & (|t| \le T) \\ 0 & (\text{muulloin}) \end{cases} = A\,[H(t+T) - H(t-T)]$$

Päättele Fourier-muunnos

a) tasapulssille $g(t) = H(t+6) - H(t)$,

b) ikkunoidulle sinille $x(t) = \sin(5t)\,[H(t+6) - H(t)]$.

Ominaisuuksia: Jos $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$, niin $\mathcal{F}\{f(t-\tau)\} = e^{-j\omega\tau}F(j\omega)$ ja $\mathcal{F}\{e^{jat}f(t)\} = F(j(\omega-a))$ ja $\mathcal{F}\{F(jt)\} = 2\pi f(-\omega)$.

Tiedetään lisäksi, että $e^{jx} = \cos x + j\sin x$,

joten $e^{-jx} = \cos x - j\sin x$ *ja* $e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x$ *ja* $e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x$.

4. Johda symmetriaominaisuuden avulla Fourier-muunnos

a) ensin funktiolle $y(t) = \text{sinc}(40t)$,

b) sitten funktiolle $z(t) = \text{sinc}(40t - 800)$.

c) Sievennä **b**-kohdassa saadun muunnoksen itseisarvo eli amplitudi mahdollisimman yksinkertaiseksi.