

Kirjoita jokaiseen konseptiin nimesi ja opiskelijanumerosi. Tee tehtävät siististi konsepteille väli-
vaiheet perustellen.

Tentissä saa olla yksi kaksipuolinen A4 käsin kirjoitettu muistilappu, jota EI tarvitse palauttaa.

1. Ratkaise alkuarvo-ongelma

$$\begin{cases} x_1' = x_1, & x_1(0) = -1, \\ x_2' = -x_2 + x_3, & x_2(0) = 0, \\ x_3' = -x_3, & x_3(0) = 1, \\ x_4' = -2x_4, & x_4(0) = 0, \end{cases}$$

matriisimenetelmällä.

2. Tarkastellaan esponenttimatriisia

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{2t} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) & t \cos(t) & t \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) & -t \sin(t) & t \cos(t) \\ 0 & 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} \cos(t) & -t \sin(t) & -\sin(t) & t \cos(t) - t \sin(t) + \sin(t) \\ 0 & \cos(t) + \sin(t) & 0 & 2 \sin(t) \\ \sin(t) & t \cos(t) - \sin(t) & \cos(t) & t \sin(t) + t \cos(t) - \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & 0 & \cos(t) - \sin(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mitkä ovat matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit, sekä näitä vastaavat yleistetyt ominais-
vektorit? Mitkä ovat ominaisarvojen algebralliset kertaluvut? Onko eksponenttimatriisi stabiili
(ja miksi on/ei ole)? Mikä on matriisin A Jordanin kanoninen muoto?

3. Tiedämme matriisista A seuraavaa. Ainoat ominaisarvot ovat $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 2$ siten, että
 $\text{alg}(\lambda_1) = 1$ ja $\text{alg}(\lambda_2) = 3$. Ominaisarvoihin liittyy ominaisvektorit \mathbf{v}_1 ja \mathbf{v}_2 . Miten lasket näistä
tiedosta similaarimuunnosmatriisin, joka muuntaa matriisin A Jordanin kanoniseen muotoon?
Mikä tämä muoto on?