MAT-60000 Matriisilaskenta (syksy 2019) / Mattila
Tentti 14.10.2019

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tenttitehtävien ratkaisut löytyvät aikanaan kurssin Moodle-alueelta.

1. (a) Osoita, että jos joukko $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ on vektoriavaruuden $\mathbb{C}^n$ ortonormaali osajoukko, niin vektorit $2\boldsymbol{x}_1 + i\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3$ ja $-i\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - 5i\boldsymbol{x}_3$ ovat keskenään ortogonaaliset. Millä skalaareilla nämä kaksi vektoria tulisi kertoa, jotta saadut vektorit muodostaisivat ortonormaalin joukon? (3p)

   (b) Matriisin $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *jälki* $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Osoita oikeaksi tai vääräksi: jos $A, B \in \mathbb{C}^n$, niin $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$. (3p)

2. (a) Etsi LU-hajotelma matriisille

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 8 \\ -8 & -11 & -12 & -16 \\ 12 & 22 & 10 & 23 \\ -4 & -4 & -9 & -8 \end{bmatrix}. \quad (4\text{p})$$

   Ohje: tarvitset kaksi iteraatiota eikä rivien permutoinnille ole tarvetta.

   (b) Päättele hajotelman perusteella, mitä ovat $\det(A)$ ja $\mathrm{rank}(A)$. Päättele sitten dimensiolauseen avulla, mitä on $\dim(\mathcal{N}(A))$. (2p)

3. (a) Olkoon k aidosti ykköstä suurempi reaaliluku. Määritä projektorimatriisi P, joka projisoi aliavaruudelle $\mathcal{S}_1 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ pitkin aliavaruutta $\mathcal{S}_2 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}\right\}$. Mikä on vektorin $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ kuva tässä projektiossa? (3p)

   Ohje: jos $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ *ja* $\{\boldsymbol{x}_{n+1}, \boldsymbol{x}_{n+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ *ovat aliavaruuksien* $\mathcal{S}_1$ *ja* $\mathcal{S}_2$ *kannat, niin* $P = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i^*$, *missä* $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_n & \boldsymbol{x}_{n+1} & \ldots & \boldsymbol{x}_m \end{bmatrix}$ *ja* $Y = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 & \ldots & \boldsymbol{y}_m \end{bmatrix} = (X^{-1})^*$.

   (b) Joku väittää, että avaruuden $\mathbb{C}^3$ luonnollisista kantavektoreista muodostettu joukko $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ on samalla Jordanin ketju, joka vastaa matriisin

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   ainoaa ominaisarvoa. Tutki, pitääkö tämä väite paikkansa. (3p)

4. Oletetaan, että eräälle matriisille A on saatu singulaariarvohajotelma

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^* .$$

Päättele hajotelman avulla (a) mikä on matriisin A kolmas diagonaalialkio a_{33}, (b) mitkä ovat matriisin A singulaariarvot, (c) mikä on aliavaruuden $\mathcal{N}(A)$ kanta, (d) mikä on aliavaruuden $\mathcal{R}(A)$ kanta, (e) mitä ovat $\mathrm{rank}(A)$ ja aliavaruuden $\mathcal{N}(A)$ dimensio, (f) mikä on matriisin A determinantti ja onko matriisi A^{-1} olemassa. (1p/kohta)

MAT-60000 Matrix Algebra (autumn 2019) / Mattila
Final Exam 14.10.2019

Neither calculators nor own materials are allowed in the exam. You do not have to return this question paper.

1. (a) Show that if the set $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ is an orthonormal subset of the vector space $\mathbb{C}^n$, then the vectors $2\boldsymbol{x}_1 + i\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3$ and $-i\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_2 - 5i\boldsymbol{x}_3$ are orthogonal. By what scalars should we multiply these two vectors so that together they would form an orthonormal set? (3p)

   (b) For a given matrix $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ the *trace* $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Prove right or wrong: if $A, B \in \mathbb{C}^n$, then $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$. (3p)

2. (a) Find the LU decomposition for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 5 & 8 \\ -8 & -11 & -12 & -16 \\ 12 & 22 & 10 & 23 \\ -4 & -4 & -9 & -8 \end{bmatrix}. \quad (4p)$$

   Hint: you will need two interations and there is no need for any row permutations.

   (b) Determine the values of $\det(A)$ and $\mathrm{rank}(A)$ from the decomposition. Then apply the Rank-Nullity theorem and determine the value of $\dim(\mathcal{N}(A))$. (2p)

3. (a) Let k be a real number strictly greater than one. Find the projector matrix P that projects to the subspace $\mathcal{S}_1 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ along the subspace $\mathcal{S}_2 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}\right\}$.

   What is the image of the vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in this projection? (3p)

   Hint: if $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ and $\{\boldsymbol{x}_{n+1}, \boldsymbol{x}_{n+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_m\}$ are bases for the subspaces $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$, then $P = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_i^*$, where $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_n & \boldsymbol{x}_{n+1} & \cdots & \boldsymbol{x}_m \end{bmatrix}$ and $Y = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 & \cdots & \boldsymbol{y}_m \end{bmatrix} = (X^{-1})^*$.

   (b) Somebody claims that the set $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ formed by the natural basis vectors of the space $\mathbb{C}^3$ is in fact a Jordan chain that corresponds to the only eigenvalue of the matrix

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Find out whether this is true or not. (3p)

4. Suppose that the singular value decomposition of a certain matrix A is

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^*.$$

Use this decomposition and find out (a) the third diagonal element of A (i.e. the element a_{33}), (b) the singular values of A, (c) a basis for the subspace $\mathcal{N}(A)$, (d) a basis for the subspace $\mathcal{R}(A)$, (e) $\mathrm{rank}(A)$ and the dimension of the subspace $\mathcal{N}(A)$, (f) the determinant of A and the existance of A^{-1}. (1 point from each part)