MAT-60000 Matriisilaskenta (syksy 2019) / Mattila
Tentti 26.11.2019

Kokeessa ei saa käyttää laskimia tai taulukoita. Tehtäväpaperia ei tarvitse palauttaa. Tenttitehtävien ratkaisut löytyvät aikanaan kurssin Moodle-alueelta.

1. (a) Kahden kompleksisen vektorin $\boldsymbol{u}$ ja $\boldsymbol{v}$ välinen kulma $\sphericalangle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ voidaan määritellä kaavalla $\cos(\sphericalangle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = \dfrac{\mathrm{Re}(\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle)}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$, missä $\mathrm{Re}(\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle)$ on siis kompleksiluvun $\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle$ reaaliosa. Laske mitä on $\cos(\sphericalangle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))$, kun $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix}1+i\\1-i\end{bmatrix}$ ja $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$. (3p)

   (b) Oletetaan, että vektorit $\boldsymbol{y}$ ja $\boldsymbol{z}$ ovat molemmat ei-homogeenisen yhtälöryhmän $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ratkaisuja, missä $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$ ja $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Osoita, että ratkaisuvektoreiden lineaarikombinaatio $a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ on myös yhtälöryhmän $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ratkaisu, jos ja vain jos kertoimet a ja b toteuttavat yhtälön $a + b = 1$. Onko yhtälöryhmän $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ratkaisujen joukko avaruuden $\mathbb{C}^n$ aliavaruus? (3p)

2. (a) Tarkastellaan matriisia

$$B = \begin{bmatrix}2 & a & b & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\3 & 3 & 3 & 0\\4 & 4 & 4 & 4\end{bmatrix},$$

   missä a ja b ovat reaalisia vakioita. Mitä ehtoja näiden vakioiden tulee toteuttaa, jotta matriisilla B olisi olemassa LU-hajotelma ilman, että sen rivejä tarvitsee permutoida (itse hajotelmaa ei tarvitse laskea). (3p)

   (b) Olkoon

$$C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & -1\\0 & -1 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \text{sekä} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}.$$

   Tutki, kuuluuko vektori $\boldsymbol{x}$ joukkoon $\mathcal{N}(C)$ ja/tai joukkoon $\mathcal{R}(C)$. (3p)

3. (a) Olkoon $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ vektori, jolle on voimassa $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, ja olkoon $P = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^*$. Osoita P ortogonaaliprojektorimatriisiksi toteamalla, että $P^2 = P$ ja että $P^* = P$. Etsi kanta aliavaruudelle, jolle matriisi P projisoi. (3p)
   Vihje: ortogonaaliprojektorimatriisi P avaruudelle $\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_k\}$ *saadaan kaavalla $P = X(X^*X)^{-1}X^*$, missä $X = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_k\end{bmatrix}$.*

   (b) Eräälle matriisille K on saatu laskettua seuraavanlainen Jordanin hajotelma:

$$K = \begin{bmatrix}9 & -3 & 0\\1 & 10 & 1\\-1 & 2 & 8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9}\\0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9}\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 1 & 0\\0 & 9 & 1\\0 & 0 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\-1 & 2 & -1\\3 & 3 & 3\end{bmatrix}.$$

   Päättele hajotelman perusteella matriisin K ominaisarvot, niiden algebralliset ja geometriset kertaluvut sekä ominaisarvoja vastaavat lineaarisesti riippumattomat ominaisvektorit. Onko matriisi K diagonalisoituva ja/tai kääntyvä? (3p)

4. Etsi singulaariarvohajotelma matriisille $L = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$. (6p)
   Vihje: matriisin U 3. sarakkeeksi käy normeerattu matriisin LL^* ominaisarvoa 0 vastaava ominaisvektori, mutta sen löytämiseksi on helpompia ja nopeampiakin tapoja.

MAT-60000 Matrix Algebra (autumn 2019) / Mattila
Final Exam 26.11.2019

Neither calculators nor own materials are allowed in the exam. You do not have to return this question paper.

1. (a) The angle $\sphericalangle(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ between complex vectors $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$ is defined from the formula $\cos(\sphericalangle(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})) = \dfrac{\operatorname{Re}(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle)}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$, where $\operatorname{Re}(\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle)$ is the real part of the complex number $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$. Calculate $\cos(\sphericalangle(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))$ in the case when $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}$ and $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Suppose that the vectors $\boldsymbol{y}$ and $\boldsymbol{z}$ are both solutions to the non-homogenous system of linear equations $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, where $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n$ and $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. Show that the linear combination $a\boldsymbol{y} + b\boldsymbol{z}$ $(a, b \in \mathbb{C})$ is yet another solution to the system $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ if and only if the coefficients a and b satisfy the equation $a + b = 1$. Does the set of solutions of the system $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ form a subspace of the vector space $\mathbb{C}^n$?

2. (a) Let us consider the matrix

$$B = \begin{bmatrix} 2 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix},$$

   where a and b are real constants. What conditions do the have to satisfy so that there exists an LU decomposition for the matrix B and no row permutations are needed (you do not have to calculate the decomposition itself).

   (b) Let

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Find out if the vector $\boldsymbol{x}$ belongs to the set $\mathcal{N}(C)$ and/or to the set $\mathcal{R}(C)$.

3. (a) Let $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ be a vector that satisfies $\|\boldsymbol{x}\| = 1$, and let $P = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^*$. Show that P is an orthogonal projector matrix by verifying that $P^2 = P$ and that $P^* = P$. Find a basis for the subspace on which the matrix P projects.
   Hint: the orthogonal projector matrix P that projects on the subspace $\operatorname{span}\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ *is obtained from the formula $P = X(X^*X)^{-1}X^*$, where $X = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \ldots & \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix}$.*

   (b) Suppose that K is the matrix that has the following Jordan decomposition:

$$K = \begin{bmatrix} 9 & -3 & 0 \\ 1 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{9} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

   By using the decomposition, find out the eigenvalues of the matrix K, their algebraic and geometric multiplicities and linearly independent eigenvectors that correspond each eigenvalue. Is the matrix K diagonalizable and/or invertible?

4. Find a singular value decomposition for the matrix $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   Hint: the 3rd column of the matrix U can be chosen to be a normalized eigenvector of the matrix LL^* that corresponds to the eigenvalue 0, unless you are able to find a shorter and easier way to determine it.