MATH.APP.260 Operaatiotutkimus

Tentti 05.05.2023 **Frank Cameron**

Huom 1: Opiskelija saa käyttää taskulaskinta.

Huom 2: Näytä välivaiheita.

Huom 3: Tentissä on 4 sivua.

1. Tässä tehtävässä tarkastellaan kaupparatsuongelmaa, jossa on n kaupunkia ja joukko N määritellään seuraavasti:

$$N = \{1, 2, \dots n\}.$$

Oletetaan, että kaupparatsuongelman optimointimallissa käytetään seuraavia binäärimuuttujia:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jos kaupungista } i \text{ kaupparatsu menee seuraavaksi kaupunkiin } j \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}, i \in N,\ j \in N,$$

Näiden lisäksi käytetään muuttujia u_i, $i = 2, 3, \dots n$. Yksi perinteinen esitys kaupparatsuongelman optimointimallille annetaan tässä:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad i \in N \tag{2}$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad j \in N \tag{3}$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1, \quad i = 2, 3, \dots n,\ j = 2, 3, \dots n, \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in N,\ j \in N \tag{5}$$

Oletetaan, että $n = 5$. *Käyvällä ratkaisulla* on kaksi ominaisuutta:

- jokaisella muuttujalla on arvo
- muuttujien arvoilla voidaan osoittaa, että jokainen rajoite toteutuu

Osittainen ratkaisu on sellainen, että vain osalla muuttujista on arvo. Joskus on mahdollista *täydentää* osittainen ratkaisu käyväksi ratkaisuksi antamalla jokaiselle puuttuvalle muuttujalle arvo. Kussakin kohdassa (a) ja (b) on osittainen ratkaisu. Kullekin kohdalle vastaa seuraaviin kysymyksiin:

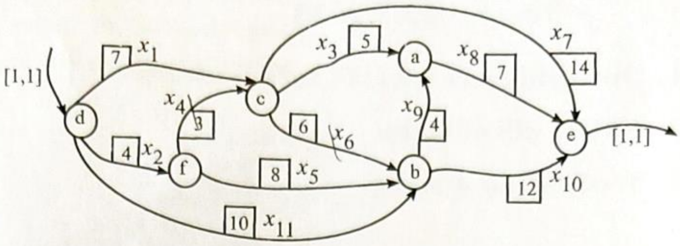
(i) Voidaanko osittainen ratkaisu täydentää käyväksi ratkaisuksi?

(ii) Jos vastasit 'kyllä' kysymykseen (i), niin täydennä osittainen ratkaisu käyväksi ratkaisuksi.

(a) **(4p)** $u_5 = 3$, $x_{53} = 1$, $x_{14} = 0$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 0$

(b) **(4p)** $u_3 = 6$, $u_4 = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{34} = 0$, $x_{45} = 0$, $x_{13} = 0$

2. Tässä tehtävässä käytetään seuraavaa verkkomallia:



Oletetaan, että jokaiseen virtaukseen x_1 liittyvä väli on $[0,1]$. Seuraavat joukot määritellään, jotta voidaan muodostaa verkkomallia vastaava optimointimalli.

$$P = \{a, b, c, f\}$$
$$Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$
$$R = \{(d,1), (d,2), (c,3), (f,4), (f,5), (c,6), (c,7), (a,8), (b,9), (b,10), (d,11)\}$$
$$S = \{(c,1), (f,2), (a,3), (c,4), (b,5), (b,6), (e,7), (e,8), (a,9), (e,10), (b,11)\}$$

Näiden lisäksi määritellään kuhunkin virtaukseen x_i liittyvä kustannus:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c_i	7	4	5	3	8	6	14	7	4	12	10

Näiden avulla ehdotetaan seuraavaa optimointimallia:

$$\min \sum_{i \in Q} c_i x_i \tag{6}$$
$$\sum_{(i,j) \in R} x_j = \sum_{(i,k) \in S} x_k \, , \; i \in P \tag{7}$$
$$x_i \geq 0 \, , \; i \in Q \tag{8}$$
$$x_i \leq 1 \, , \; i \in Q \tag{9}$$

(a) (**4p**) Ikävä kyllä rajoitteita puuttuu optimointimallista (6)–(9). Muodosta puuttuvat rajoitteet.
Huom: Anna ainoastaan puuttuvat rajoitteet.

(b) (**5p**) Oletetaan, että $x_1 = 1/2$, $x_6 = 0$ ja $x_{10} = 1/4$. Täydennä tämä osittainen ratkaisu kokonaiseksi käyväksi ratkaisuksi.

(c) (**5p**) Määritellään seuraavat binäärimuuttujat:

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{jos pisteestä } i \text{ lähtee ainakin yksi nollasta poikkeava virtaus} \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases} \, , i \in P$$

Halutaan lisätä seuraava ehto optimointimalliin:

Joukon P pisteistä korkeintaan kahdesta lähtee nollasta poikkeava virtaus.

Käyttäen binäärimuuttujia δ_i, $i \in P$, tee sopivat muutokset optimointimalliin, jotta tämä ehto otetaan huomioon. Optimointimallin täytyy pysyä lineaarisena.

3. Mari on projektipäällikkö. Hänen ryhmänsä on vastuussa lukuisista projekteista seuraavan puolen vuoden aikana. Marin ryhmässä on lukuisia työntekijöitä, jotka hänen on osoitettava viisaasti näihin projekteihin. Hän haluaa muodostaa mallin, joka auttaa häntä päättämään, mitkä työntekijät tulisi osoittaa mihinkin projektiin. Hän aloittaa määrittelemällä seuraavat joukot.

$$\Psi = \{\text{työntekijät Marin ryhmässä}\}$$
$$\Omega = \{\text{ projektit, joista Marin ryhmä on vastuussa seuraavan puolen vuoden aikana}\}$$

Hän myös määrittelee seuraavat muuttujat:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{kun työntekijä } i \text{ osallistuu projektiin } j \\ 0 & \text{kun työntekijä } i \text{ ei osallistu projektiin } j \end{cases}, \; i \in \Psi, \; j \in \Omega$$

$$x_{ij} = \text{kuinka monta viikkoa työntekijä } i \text{ tekee työtä projektissa } j \;, i \in \Psi, \; j \in \Omega$$

Kussakin kohdassa (a), (b), (c), (d), (e), (f) ja (g) esitetään ehto, jonka Mari haluaa sisällyttää optimointimalliin. Muodostaa kullekin ehdolle lineaarinen rajoite (tai lineaariset rajoitteet).

(a) **(2p)** Mari haluaa, että jokainen työntekijä osallistuu ainakin 3 projektiin.

(b) **(2p)** Mari haluaa, että jokaiseen projektiin osallistuu korkeintaan 10 työntekijää.

(c) **(2p)** Mari määrittelee parametrin t_i kuvaamaan, kuinka monta työviikkoa yhteensä työntekijä i voi käyttää projekteihin. Siis työntekijä i saa tehdä työtä projekteissa korkeintaan t_i työviikkoa.

(d) **(2p)** Työntekijän i työviikkojen määrä projektissa j on nollasta poikkeava ainoastaan silloin, kun hän osallistuu projektiin j.

(e) **(2p)** Jos työntekijä osallistuu projektiin, Mari haluaa, että työntekijä on tosissaan mukana. Näin ollen, jos työntekijä i osallistuu projektiin j, niin hänen täytyy tehdä ainakin 4 viikkoa työtä projektissa.

(f) **(2p)** Hän tietää, että joidenkin työntekijöiden osaamista ei tietyissä projekteissa tarvita. Näin ollen, hän määrittelee seuraavan joukon:

$$\Delta = \{(i, j) \; : \; \text{työntekijä } j \text{ ei osallistu projektiin } i\}$$

Muodosta rajoite (tai rajoitteet), jossa joukko Δ otetaan huomioon.

(g) **(4p)** Mari on jakanut ryhmänsä työntekijät 3 luokkaan kokemuksen perusteella:

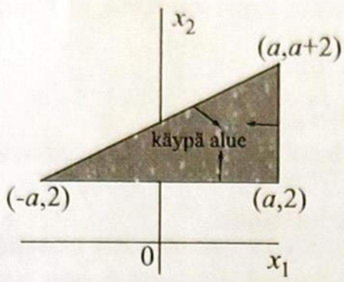
luokka I työntekijällä on korkeintaan 1 vuoden kokemus
luokka II työntekijällä on 1–3 vuoden kokemus
luokka III työntekijällä on enemmän kuin 3 vuoden kokemus

Jotta hän voi ottaa nämä luokat huomioon, Mari määrittelee seuraavan joukon:

$$\Gamma = \{(i, j) \; : \; \text{työntekijä } i \text{ kuuluu luokkaan } j, i \in \Psi, \; j \in \{\text{I, II, III}\}\}$$

Esimerkiksi, kun työntekijä 4 kuuluu luokkaan II, voidaan kirjoittaa $(4, \text{II}) \in \Gamma$. Mari haluaa, että kaikista projektiin j osallistuvista työntekijöistä, enintään neljäsosa voi kuulua luokkaan I.

4. Oletetaan, että on lineaarinen optimiointimalli, jonka käypä alue on kolmio (x_1, x_2)-tasossa. Kolmion kulmien koordinaatit ovat $(-a, 2)$, $(a, 2)$ ja $(a, a+2)$, jossa $a > 0$. Tämä kolmio esitetään seuraavassa kuvassa.



Kolmion pinta-ala on 1.

(a) **(2p)** Laske a:n arvo.

(b) **(6p)** Muodosta rajoitteet, jotka määrittävät käyvän alueen.

(c) **(2p)** Keksi käypä ratkaisu, jossa on täsmälleen 1 sitova rajoite.

(d) **(2p)** Oletetaan, että optimointimallin kohdefunktio on

$$\min x_1 + cx_2$$

Millä parametrin c arvoilla optimointimallin optimiratkaisu on $(a, a+2)$?